Christian Bennet

Om vad logik inte skall vara

I diskussioner kring logikens roll inom universitetsvärlden, eller akademin som det heter numera, har jag ofta stött på inlägg med följande ordalydelse:

Logiken skall inte bara vara en hjälpvetenskap till matematiken.

Sådana inlägg är intressanta av flera skäl och jag vill gärna kommentera några av de uttryck som används här. För enkelhetens skull låter vi P vara en tänkt person som uttalar ovanstående mening.

”*inte bara*”: Med dessa ord uttrycker P två saker; dels att logiken *är* en hjälpvetenskap till matematiken, dels att detta är en för snäv avgränsning av ämnet. Möjligen framgår det också att P anser att logikens roll som hjälpvetenskap till matematiken inte är särskilt väsentlig.

”*skall*”: Detta ord kan förstås i det här sammanhanget tolkas på ett flertal olika sätt. En tolkning är att uttalandet är av moralisk art. Det är moraliskt förkastligt att logiken bara är en hjälpvetenskap till matematiken. Det kanske orsakar onödigt lidande av något slag att det är så, eller strider mot någon moralisk norm. En annan tolkning är att uttalandet är juridiskt; lika lite som att man inte skall felparkera så skall logikern inte bara ägna sig åt en matematikens hjälpvetenskap. Det strider helt enkelt mot en eller annan förordning, kanske högskoleförordningen eller något liknande. En tredje, och kanske mer rimlig, tolkning är att uttalandet är av politisk art. P anser i så fall antingen att logikens varande bara en hjälpvetenskap åt matematiken inte går ihop med befintliga politiska riktlinjer eller rimmar dåligt med nuvarande politiska, kanske ekonomiska, styrmedel eller att logiken enligt Ps politiska ideologi borde ha en annan roll än att bara vara en hjälpvetenskap åt matematiken. P kanske anser att de resurser som ges logiken i nuvarande form är slöseri med skattemedel och kunde användas bättre.

”*hjälpvetenskap*”: Detta är ett något svårtolkat begrepp. I diskussioner kring matematikämnet sägs ibland, särskilt i samband med pedagogiska och didaktiska frågeställningar, att matematiken är en hjälpvetenskap till de empiriska vetenskaperna. I dagens svenska skola framställs ämnet ofta på det sättet. Exempelvis ges matematikkurser ofta olika utformning i ekonomklasser jämfört med naturvetarklasser, även om kurserna egentligen, dvs. matematiskt, har samma innehåll. Man tänker sig då att matematiken ger den empiriska vetenskapen verktyg för att göra beräkningar eller för att testa hypoteser eller för att beskriva strukturer eller kanske klasser av strukturer. Möjligen kan man här säga att matematiken som hjälpvetenskap fyller två funktioner; dels att tillhandahålla metoder för att lösa problem, dels att tillhandahålla ett enhetligt och exakt språk i vilket naturfenomenen kan beskrivas.

Även andra vetenskapsområden kan i viss mån fungera som hjälpvetenskaper. Exempelvis är statistik i en rimlig mening hjälpvetenskap till områden som ekonomi eller biologi, ekonomi är en hjälpvetenskap till sociologi och statsvetenskap, medicin är en hjälpvetenskap till psykologi, psykologi är en hjälpvetenskap till sociologi etcetera. I själva verket är kanske de flesta vetenskaper hjälpvetenskaper till varandra.

Nu är det knappast begreppet hjälpvetenskap i denna vida mening som P avser. I annat fall vore uttalandet ointressant, även om blotta möjligheten att vara en hjälpvetenskap kräver ett substantiellt ämnesspecifikt innehåll. Så vad kan P egentligen mena med att logiken är en hjälpvetenskap?

”*till matematiken*”: Från mitten av 1800-talet och fram till idag har logiken spelat en väsentlig roll både inom matematiken och som en matematikens vetenskapsfilosofi. Jag skall bara nämna tre exempel av flera på logikens inommatematiska funktion, ett äldre och två nyare, alla hämtade inom ”ren” matematik snarare än från något gränsområde mellan matematik, lingvistik och datalogi. För den som inte är bevandrad i den logiska begreppsvärlden, är de begrepp av mer eller mindre teknisk natur som jag använder nedan lätta att finna förklaringar till via internet.

1. Cantors analys av oändlighetsbegreppet i kombination med Dedekinds, Freges, Cantors, Weierstrass och andras arbeten ledde redan i början av 1870-talet till två konkreta matematiska resultat. Vid en tidpunkt då det bara fanns ett fåtal kända exempel på transcendenta tal i decimalform, varav Eulers konstant var det enda matematiskt intressanta, visade Cantor, utan att ge ett enda exempel, att praktiskt taget alla reella tal är transcendenta. I samma veva visade han också, mot dåtidens övertygelse, att antalet punkter i ett rum inte är kopplat till rummets dimension. Exempelvis är den reella tallinjen liktalig med talplanet som är liktaligt med det tredimensionella rummet.

2. Freges formalisering av bevisbegreppet och introduktion av fullständiga härledningssystem har, tillsammans med resultat av Turing, Church, Gentzen och andra, lett till nya rent inommatematiska resultat i modern tid. Den 10 oktober 1996 bevisades Robbins gissning med vä-

sentligt stöd av ett interaktivt bevisverktyg och exempel på ny matematik som knappast hade uppnåtts utan hjälp av datoriserade härledningssystem blir allt fler. Bland annat används interaktiva bevis med framgång inom teorin för kvasigrupper och i geometrin.

3. 1963 bevisade Cohen att bl.a. kontinuumhypotesen och urvalsaxiomet inte kan bevisas i Zermelo-Fraenkels mängdteori. Den teknik som Cohen använde, och är upphovsman till, kallas på svengelska för ”forcing” och har utvecklats till ett verktyg som idag ligger till grund för ett avancerat studium av algebraiska strukturer.

Det är också lätt att ge exempel där logiken har gett, och fortfarande ger, insikter *om* matematik, snarare än *i* matematik, dvs. resultat av metamatematisk karaktär. Jag skall helt kort nämna tre sådana.

1. Freges och senare Hilberts, Gödels, Tarskis och andras analys av såväl syntax som semantik för formella språk gör det möjligt att behandla precisa frågeställningar kring t.ex. fullständighet, avgörbarhet, konsistens eller beviskomplexitet med rigorösa metoder. Konkreta exempel av äldre datum är Hilbert-Tarskis axiomatisering av geometrin, Löwenheim-Skolemresultat, Gödels ofullständighetssatser, Gentzens konsistensbevis för aritmetiken, Tarskis bevis för avgörbarhet hos teorierna för reellt respektive algebraiskt slutna kroppar och Turings bevis för att haltproblemet, eller stopproblemet, är oavgörbart. Denna lista kan förstås göras betydligt längre. Bland nyare resultat kan jag nämna Novikovs och Boones bevis för att ordproblemet för grupper är olösbart, Matiyasevich lösning 1970 av Hilberts tionde problem, Morleys sats, också från 1970, och framväxten av stabilitetsteorin under senare år.

2. ”Reverse Mathematics” är ett område av logiken om tagit ordentlig fart under de senaste åren. Idén är att studera vilka axiom som är nödvändiga, snarare än tillräckliga, för att erhålla olika matematiska resultat. Studier inom området har helt nyligen lett till att man har kunnat visa att rent matematiska satser, exempelvis inom analys och topologi, är ekvivalenta med logiska principer, rörande t.ex. komprehension eller induktion, över svaga andra ordningens logiker. De första resultaten av den här karaktären kom egentligen redan under tidigt 1900-tal då man visade olika ekvivalenter till urvalsaxiomet, om man nu vill räkna urvalsaxiomet, eller någon av dess ekvivalenter, som en logisk princip.

3. Under de allra senaste åren har en allt större grupp logiker ägnat sig åt att försöka hitta i någon mening plausibla mängdteoretiska axiom för att avgöra, framför allt, kontinuumhypotesen. Det handlar då ofta om axiom som postulerar existensen av s.k. stora kardinaltal. Inom det här området finns en pågående filosofiskt intressant debatt i vilken såväl filosofer som matematiker deltar. Gödel ansåg under en period att kontinuet hade kardinalitet $\aleph_2$, något som det idag finns flera seriösa argument för.

Om det nu är resultat av den här typen som P avser, anser P alltså att logiken borde syssla även med andra frågor än sådana liknande dessa. Vilka frågeområden är det då som P kan tänkas avse och som skulle få vågskålen att väga över för P till fördel för ett berättigande av ämnet? Jag kan tänka mig ett antal svar:

Logiken bör vara mer filosofisk: Förr var det vanligt att skilja *filosofisk* logik från *matematisk* eller *formell* logik. Vad informell logik skulle kunna vara, vet jag inte, men man skulle ju kunna tänka sig att exempelvis modallogik eller andra intensionala logiker skulle kunna räknas som filosofisk men ickematematisk logik, dvs. till en del av logiken som inte utgjorde en hjälpvetenskap till matematiken. Problemet är bara att denna uppdelning knappast längre är möjlig att göra.

För det första har modallogiken idag påtagliga metamatematiska implikationer. Exempelvis kan Gödels ofullständighetsresultat och en intressant analys av partiell konservativitet, interpreterbarhet och andra begrepp som är relaterade till relativa konsistensbevis, med framgång analyseras i modallogiska termer. Nyckelresultatet här är Solovays aritmetiska fullständighetssats från 1976.

För det andra är de metoder som används idag för att analysera intensionala logiker ofta hämtade från matematiken. Exempelvis används p-morfismer, filtrationer och teorier för olika ordningar till och med i den mest elementära modellteorin för modala logiker.

Modallogiken har också funnit icketriviala användningsområden inom datalogi, exempelvis när det gäller hård- och mjukvaruverifiering.

Bläddrar man i *Handbook of Philosophical Logic* upptäcker man snart att praktiskt taget varje annat förslag på filosofisk men ickematematisk logik drabbas på samma sätt. Tidslogik, flervärd logik, svaga logiker av olika slag, språkfilosofiskt orienterade analyser av naturliga språk, kvantlogik och, naturligtvis inte minst, intuitionistisk logik, alla har de på ett eller annat sätt matematisk relevans och utnyttjar mer eller mindre avancerade matematiska metoder.

Dessutom är det tveklöst så att den del av logiken som skulle kunna benämnas matematisk, i allra högsta grad har filosofisk relevans; bevisteori, modellteori, mängdteori, metalogik och rekursionsteori har alla sin grund i filosofiskt relevanta frågeställningar kring härledbarhet, sanning, begreppsbildning, teoribildning och problemlösning. Exempel inom dessa områden inom och kring matematikämnet har vi redan sett och det är inte svårt att bredda exempelsamlingen i filosofisk riktning.

Kort sagt förefaller det svårt att vare sig innehållsmässigt eller på metodologisk grund göra en vettig distinktion mellan filosofisk och ickefilosofisk logik.

Logiken bör vara mer språkorienterad: Ibland presenterar man logiken som teorin för formella språk. Tanken kan då vara att logiken, genom att teoretisera kring syntax och semantik för formella språk, i första hand har språkfilosofisk relevans. Men inte heller här kan man slippa ifrån epitetet att vara en hjälpvetenskap till matematiken. Grammatiker och härledningssystem analyseras väsentligen i samma termer och resultat, exempelvis inom komplexitetsteori, omfattar såväl matematiska och andra teorier som grammatiker. Studiet av kvantifikatoruttryck i naturliga språk överlappar med studiet av extensioner till första ordningens logik och abstrakt modellteori och har metamatematiska implikationer och inget av dessa områden kan tveklöst inte utgöra stödområden för matematiken.

Logiken bör handla mer om vad som är korrekt tänkande: I logiken analyserar man begrepp som *korrekt slutledning*, *giltigt resonemang* osv. oavsett i vilket sammanhang slutledningen eller resonemanget förekommer. Att denna analys blir fruktbar kräver förstås att man har relevanta och effektiva analysverktyg, något som man hittade just under andra halvan av 1800-talet i och med att man, dvs. Frege, Hilbert och andra, insåg hur man kunde utnyttja matematiska metoder i analysen. En av Freges banbrytande insatser var att, förhoppningsvis en gång för alla, befria logiken, och matematiken också för den delen, från psykologism. Hur vi faktiskt resonerar i olika situationer och vilka intuitioner vi grundar våra resonamang i är inte en fråga för logiken och kanske inte heller för filosofin, utan är snarare en psykologisk eller sociologisk eller, för den delen, en kognitionsteoretisk eller medicinsk fråga, beroende på exakt vad man menar.

Att dessa ämnesområden gränsar till varandra är förstås en annan sak. Om man vill ligger logiken i så fall klart inom gränsområdet mellan filosofi, matematik, lingvistik och datalogi, med tillämpningar inom de flesta, kanske alla, vetenskapsområden och är då inte specifikt en hjälpvetenskap till just matematiken.

Sammanfattningsvis skulle jag vilja svara P att logiken idag inte i någon rimlig mening ”bara är en hjälpvetenskap till matematiken”. Lite beroende av vad man lägger in i de olika begreppen är det antingen så att logiken faktiskt utgör en hjälpvetenskap till matematiken och i så fall är detta inte så ”bara”, utan logiken utgör då som denna hjälpvetenskap ett mycket omfattande och påtagligt fruktbart vetenskapligt område, eller så är logiken inte alls en sådan hjälpvetenskap utan snarare en vetenskap som behandlar ett antal intressanta och filosofiskt relevanta frågor, ofta med matematiska metoder och ofta med relevans för matematik eller andra vetenskaper. Det senare är i så fall en beskrivning som logiken delar med ämnen som lingvistik eller kognitionsvetenskap eller datavetenskap. Logikens moderna historia vittnar om att ämnet har haft, och fortfarande har, hög relevans för matematikämnet, såväl inomvetenskapligt som vetenskapsfilosofiskt, liksom för vetenskapsfilosofin för formaliserbara vetenskaper i allmänhet.

Att logiken borde vara något annat än detta, kan man naturligtvis anse och jag har full förståelse för den som har, om inte i första hand moraliska, så i alla fall politiska invändningar mot att vi satsar skattemedel på logik. Men den diskussionen måste i så fall föras med ett betydligt bredare perspektiv och kanske rentav omfatta hela akademin.