Jörgen Sjögren

# Om begreppsbildning i matematik

> [D]en väsentliga saken med matematik är att den formar begrepp…
> *Wittgenstein*, Remarks on the Foundations of Mathematics, del VII, §33

En i matematikfilosofiska kretsar vanlig undran är hur det är möjligt att matematik, som inte har med verkligheten att göra, är ett så oerhört effektivt verktyg i försöken att beskriva och förstå denna verklighet. Denna undran är måhända störst i kretsar som bekänner sig till en realistisk ontologi liknande Platons. Den utrycks hos Wigner som hävdar följande.

> Den enorma användbarheten av matematik i naturvetenskaperna är något som gränsar till det mystiska och det finns ingen rationell förklaring för detta. (Wigner, s. 223)

Samma undran uttrycker Feynman på följande sätt.

> Jag tycker det är mycket förundrande att det är möjligt att förutsäga vad som kommer att hända med hjälp av matematik, som helt enkelt är att följa regler som egentligen inte har något att göra med den ursprungliga saken. (Citerat efter Steiner, s. 14)

För att försöka förstå hur det är möjligt att tillämpa matematik, presenterar jag, utgående från Aristoteles, en teori om hur matematiska begrepp bildas. Han menar (t.ex. i *Fysiken* B2, 193b–194a) att matematikens och fysikens begrepp är separerbara i tanken från de fysiska tingen. Dessutom är de matematiska begreppen ”mer separerbara än” fysikens, i det att fysikens begrepp svarar mot tillfälliga egenskaper, som trubbnäst, medan de matematiska begreppen svarar mot essentiella egenskaper, som krökt. I en artikel om Aristoteles’ matematikfilosofi diskuterar Lear hur drag, egenskaper, i verkligheten filtreras ut och ger matematiska begrepp. Från en fysisk, liksidig triangel av brons kan i tanken triangelegenskapen isoleras, och i och med detta är det möjligt att matematiskt bevisa påståenden om trianglar. De egenskaper som alla trianglar bevisligen har är sedan tillämpbara på bronstriangeln.

Den teori, eller uppfattning, som framläggs i denna uppsats är, att matematiska begrepp är explikationer (se nedan) av vaga, vardagliga begrepp, att matematiska begrepp därmed har en fot i verkligheten och att möjlig-heten att tillämpa matematik därmed blir uppenbar. Denna uppfattning har som konsekvens att skillnaden mellan matematik och exempelvis fysik delvis suddas ut, men skillnaden att ”fysikens objekt är mindre separerbara än matematikens” kvarstår.

Begreppet ”explikation” är från Carnap, och tanken är att ge vaga eller obestämda uttryck en ny och precis mening. En explikation är på formen $A =_{expl} B$, där $A$ är explikatum och $B$ explikandum. Wedberg karakteriserar en explikation på följande sätt: (1) Explikatum skall kunna användas i stället för explikandum i de flesta fall där detta hittills brukat användas. (2) Definition av explikatum skall ges i en exakt form. (3) Explikatum skall vara ett vetenskapligt fruktbart begrepp. (4) Explikatum skall vara så enkelt som kraven ovan tillåter.

Carnap själv avsåg att ge en explikation av sannolikhetsbegreppet som det används i fraser som ”Teori A är mer sannolik än teori B”.

I denna uppsats diskuterar jag två matematiska begrepp, talbegreppet och funktionsbegreppet, och olika försök att explikera dem. Först behandlas talbegreppet, och några olika explikationer av detsamma. Uppenbart har en del samhällen haft behov av att utveckla ett språk i vilket man kan tala om antal. Ett dylikt behövs inte för att effektivt avgöra om två små mängder är lika stora. Den rike bonden med många getter kan veta att de opålitliga vallpojkarna kommer hem med lika många getter på kvällningen genom att konstruera en bijektion, t.ex. så att för varje get som släpps ut så sparar bonden en sten. När flocken kommer hem på kvällen kontrollerar han mot stenhögen att lika många getter kommer hem som släpptes iväg.

I en diskussion om realism hävdar Maddy (1990, kap. 2.2) att vi kan varsebli konkreta mängder, och alltså inte bara elementen i mängderna. Detta är då ett argument för att dylika konkreta, varseblivbara mängder existerar. Denna uppfattning tonar hon senare ner då hon i (Maddy 1997, del III:4) presenterar sin uppfattning om naturalism i matematik, dvs. tanken att matematik ska förstås på sin egna villkor, och att filosofer inte kan utgöra en extra-matematisk tribunal, som matematiker har att svara inför. Vad gäller möjligheten att varsebli mängder, så är min uppfattning att vi själva bildar kollektioner, att kollektionerna inte finns som naturliga objekt. Det är då möjligt att tala om tallrikarna i skåpet, om vinflaskorna i källaren, men det är snarare så att denna hopklumpning av objekt i aggregat mer är en nödvändig förutsättning för ett språk över huvud taget, än att det är naturgivna sammanhang. När en individ lär sig ett språk, lär hon sig samtidigt att klumpa ihop delar av verkligheten till enheter, och detta leder till tron att det finns ”naturliga” klumpar, och så småningom uppövas dessutom en förmåga att se 3-klumpar, 4-klumpar osv. – kort sagt ett språk utvecklas i vilket antal kan behandlas. I detta lär vi oss också i vilka enheter det är lämpligt att räkna i olika situationer. Detta antalsspråk blir så småningom ganska precist och vi har i och med detta ord för ganska abstrakta ”ting” – nämligen tal. Vi lär oss exempelvis också hur och vilka klumpar som kan ”slås ihop” additivt och vilka som inte kan detta – en djurflock och en djurflock till behöver inte bli två djurflockar, men antalet djur i en djurflock och antalet i en annan kan fungera additivt. Givet det inledande getexemplet så kan varje hög i lämpligt vald enhet representera ett antal. Fundamentalt i aritmetik är val av enhet, och fundamentalt i tillämpningar av aritmetik är val av fysisk enhet.

Detta mer eller mindre intuitiva talbegrepp har det under t.ex. 1800- och 1900-talen gjorts flitiga explikationsförsök av. Välkänd är Freges explikation i vilken ett tal är något som tillordnas ett begrepp.

> … det tal som tillkommer begreppet *F*, är omfånget hos begreppet ”liktaligt med begreppet *F*”. (Frege, § 68)

Till exempel är

> 0 det tal som tillkommer begreppet ”icke-identisk med sig själv”. (Frege, § 74)

Senare, mängdteoretiska, explikationer är exempelvis Zermelos, som identifierar sviten naturliga tal med följden $\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \ldots$, och von Neumanns, som använder sviten $\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \ldots$ Både Zermelos och von Neumanns explikationer av sviten av naturliga tal duger i den meningen att de satisfierar de vanliga axiomen för naturliga tal. Det är emellertid inte särskilt meningsfullt att fråga om talet 2 verkligen är t.ex. $\{\phi, \{\phi\}\}$. Om olika definitioner av tal är just explikationer, så är inte den ena ”sannare” än den andra. Det enda som är intressant är huruvida explikationen fullgör sina skyldigheter, t.ex. satisfierar en lämplig uppsättning axiom.

Det andra exemplet att behandla är funktionsbegreppet. Ursprungligen användes funktionsbegreppet geometriskt, och ordet ”funktion” användes av Leibniz i fraser som ”en tangent är en funktion av en kurva”. Under början av 1700-talet börjar det geometriska synsättet överges, och ett algebraiskt synsätt göra sig alltmer gällande. Euler ger följande definition av funktionsbegreppet 1748.

> En funktion av en variabel kvantitet är ett analytiskt uttryck bildad på ett godtyckligt sätt från denna variabla kvantitet och tal eller konstanta kvantiteter. (Citerat efter Kleiner, 1989)

Så småningom formuleras moderna definitioner, som att $f$ är en funktion från en mängd $A$ till en mängd $B$, om och endast om $f$ för varje element i $A$ ordnar exakt ett element i $B$. Denna idé om en funktion som en godtycklig hopparning accepteras inte av alla. Inom den matematikfilosofiska skolbildning som kallas ”konstruktivism”, kräver man att det skall finnas en effektiv metod att beräkna funktionsvärdet för varje argument. Funktionsbegreppet har dessutom utvecklats vidare under 1900-talet till exempelvis så kallade generaliserade funktioner, eller distributioner, t.ex. Diracs deltafunktion.

En möjlighet är nu att uppfatta funktionsbegreppet som en explikation av den vaga föreställningen att något, $A$, som förekommer vid en tidpunkt (entydigt) bestämmer något, $B$, som förekommer vid en annan tidpunkt. $A$ kan t.ex. vara en kulas läge på ett sluttande plan vid tidpunkt $t_1$ och $B$ kulans läge vid en senare tidpunkt $t_2$. Detta minner på ett vagt sätt om någon variant av orsaksbegreppet, eller Humes konstanta konjunktion mellan händelser. Förmodligen gör datalogen Judea Pearl, kvantmekaniken till trots, sig till tolk för många naturvetenskapligt inriktade forskare med följande uppfattning.

> Naturen besitter stabila, kausala mekanismer som, på en detaljerad beskrivningsnivå, är deterministiska, funktionella relationer mellan variabler. (Pearl, s. 43)

Jag använder i fortsättningen ”orsak” i den mening som antytts ovan, trots den metafysiska belastning som vidhänger detta begrepp. En funktion ger mått på relevanta storheter, som är associerade med $A$ respektive $B$. Man kan nu tänka sig att beskrivningar av händelser, som på något sätt är relaterade till varandra via något orsakssamband, kläs i en matematisk terminologi, och detta kan då resultera i definitioner av funktionsbegreppet likt Eulers ovan. Vad som sedan händer i den matematiska världen är att detta, eller dessa, funktionsbegrepp testas. Man inser att det finns olika typer av funktioner – kontinuerliga funktioner, deriverbara funktioner, integrerbara funktioner etc. Under andra halvan av 1800-talet diskuterades flitigt så kallade patologiska funktioner, t.ex. kurvor som fyller hela planet, och detta bland annat för att testa funktionsbegreppet. En annan viktig komponent i utvecklingen av funktionsbegreppet har varit diskussioner om konvergens av Fourierserier, oändliga summor av trigonometriska funktioner, och villkor för detta. Det visade sig att diskontinuerliga funktioner kan uppstå som gränsfunktioner av kontinuerliga funktioner, och det skulle inte vara möjligt enligt exempelvis Eulers uppfattning om vad en funktion är.

Ett viktigt moment i uppkomsten och utvecklingen av funktionsbegreppet var dessutom uppfattningen om kontinuerlig rörelse som en kurva, vilket ledde till att man länge identifierade funktioner med kontinuerliga kurvor. Detta står emellertid inte i motsättning till vad som diskuterats ovan, eftersom rörelse i sin tur kan uppfattas som orsakat av något. Min framställning avser inte att vara en exakt historisk beskrivning av funktionsbegreppets utveckling, utan mer en rekonstruktion av en möjlig begreppsutveckling. Tilläggas kan också att ett tankemönster som möjliggjorde naturvetenskapens snabba tillväxt under sextonhundratalet var Galileos och Newtons uppfattning att man i fysik söker beskrivningar och inte orsaker (Kline, kap. 16).

Sammanfattningsvis kan funktionsbegreppet ses som en explikation av ett vagt orsaksbegrepp. När väl någorlunda precisa definitioner av ett begrepp är givet testar matematiker begreppets duglighet, och detta sker rent deduktivt genom att begreppet kopplas ihop med andra begrepp. Fysikern testar sina föreslagna orsakssamband empiriskt, och eftersom funktionsbegreppet är en lyckad explikation, så kan funktionsbegreppet fruktbart användas om fysikaliska skeenden där orsakssamband, eller funktionella samband, verkar föreligga.

Under 1930-talet, och även senare, framfördes, av bland andra Gödel, Church, Turing och Post, ett antal olika förslag på hur begreppet ”beräkningsbarhet” skall förstås. Det bevisades också att samtliga dessa olika preciseringsförsök genererade precis samma klass av funktioner. I en tidigare uppsats (Sjögren 1997) har jag föreslagit att dessa preciseringsförslag är just explikationer av begreppet ”beräkningsbarhet”, och det följer då också att begreppet beräkningsbarhet kan explikeras på endast ett sätt, om vi med ”ett sätt” menar att de i sig (intensionalt) olika definitionerna genererar samma klass funktioner (extensionalt). På motsvarande sätt ger de olika explikationerna av begreppet ”naturligt tal” upphov till samma typ av sekvens av objekt. Det verkar också som om det bara finns ett sätt att tillräckligt generellt och på ett fruktbart sätt explikera funktionsbegreppet.

På motsvarande sätt, menar jag, är det möjligt att behandla många andra matematiska begrepp som ”linje”, ”kontinuerlig”, ”gränsvärde”, ”infinitesimal” etc.

Jämför detta med ett fysikaliskt begrepp som ”gravitation”. Det är en sak i Newtons mekanik, och något helt annat i Einsteins allmänna relativitetsteori. Fysikaliska begrepp är teoriberoende på ett annat sätt än matematiska i och med att fysikaliska teorier är provisoriska till sin karaktär, medan etablerade matematiska teorier har en helt annan stabilitet. Utgående från att etablerade matematiska begrepp har unika explikationer, medan fysikaliska är kraftfullt teoriberoende, anser jag att det finns en möjlighet att förstå en viktig skillnad mellan matematik och fysik, det som hos Aristoteles heter matematiska objekt är ”mer separerbara” än fysikaliska.

När en explikation väl blivit etablerad börjar den leva ett eget liv i den matematiska världen, och får en allt mer abstrakt karaktär. Med hjälp av dessa explikerade begrepp definieras nya på ett rent abstrakt sätt, och den koppling som fanns till de ursprungliga problemen (begreppen) ses inte längre, eller ses åtminstone inte på samma sätt. Begreppen har fått ett eget liv, och i en del matematikfilosofier också hypostaserats och fått en egen objektiv (platonsk) existens. En intressant illustration av hur matematiska begrepp utvecklas tillsammans med teorier i vilka de ingår finns i Lakatos’ bok *Bevis och motbevis*. Han presenterar där Eulers sats för sambandet mellan antalet hörn ($H$), kanter ($K$) och sidoytor ($S$) i en polyeder ($H - K + S = 2$). Boken, som är skriven i dialogform, innehåller sedan diskussioner om hur detta ska bevisas, vad som händer med satsen för olika typer av kroppar, t.ex. polyedrar med hål i. Olika hypoteser testas deduktivt, och i samband med detta sker preciseringar.

I och med att matematiska begrepp är sprungna ur samma källa som t.ex. fysikaliska, så är det möjligt att förstå matematikens tillämpbarhet, men medan matematikern testar sina begrepp deduktivt mot t.ex. motsägelsefrihet, så testar fysikern sina begrepp mot en empiriskt given verklighet. Matematik och fysik är därmed skilda discipliner metodiskt, men arbetar ofta med samma begrepp.

Mina tankegångar ovan kan påminna om de som utvecklats av Ernest (se t.ex. s. 75–79), men är inspirerade av Aristoteles’ sätt att via abstraktioner bilda matematiska begrepp. Ernest menar att basen för matematiska begrepp finns i en lingvistisk kunskap, och han skiljer mellan definierade och primitiva begrepp, där de sistnämnda har en observationsmässig bas. Exempel på primitiva begrepp menar Ernest är ”linje”, ”kub”, ”ett” och ”nio”. Nya begrepp definieras sedan med implicita egenskaper hos en ändlig uppsättning exempel, begreppet ”tal” definieras som det som består av ”ett”, ”två”, ”tre” och andra objekt med liknande egenskaper. Slutligen menar Ernest inte detta som en psykologisk hypotes, utan som en teoretisk konstruktion av den matematiska kunskapens uppkomst via abstraktion. Matematik är dessutom enligt Ernest en social konstruktion.

En annan uppfattning som kan tyckas likna min framförs av Lakoff och Núñes. Deras uppfattning är att matematiska begrepp är grundade i konceptuella metaforer, där en konceptuell metafor är en mekanism medelst vilken det abstrakta förstås i termer av det konkreta. För talbegreppet hävdar de att det finns fyra dylika konceptuella metaforer av vilka en är ”samlingar av objekt”, och en annan är ”måttstocken”. Uppfattningen framförs av Lakoff och Núñes ur ett kognitivistiskt perspektiv och den är avsedd att vara en psykologisk hypotes. Eftersom matematiska begrepp är konkret grundade finns det inte heller några problem med att förstå matematikens tillämpbarhet. Matematik är, menar de, inte heller enbart en godtycklig, kulturell skapelse, en social konstruktion, i och med att den har en fysisk grund.

I min ovan skisserade modell för hur matematiska begrepp danas, så ligger det nära till hands att säga att en explikation är lämplig eller fruktbar, om den är lyckad. Hopkopplingen mellan begrepp, som sker i axiom, kan då också ses som fruktbar, och blir snarast att uppfatta som en konvention. Det ligger då nära till hands att hamna i en situation där en matematisk teori blir ett instrument, och sanning blir som hos Poincaré konvention. Ett problem med detta är att all matematik får karaktär av godtyckligt spel. Vi spelar detta spelet nu, men kunde precis lika gärna spela det där spelet i stället.

Detta behöver emellertid inte vara sista ordet. Matematik är inte bara ett språk. Matematiska påståenden handlar också om något, och detta något är minst två saker. Påståendena handlar om en tänkt, abstraherad matematisk verklighet, likt en struktur i modellteori. En sats är sann om den korrekt beskriver denna tänkta verklighet. I denna tänkta, abstrakta värld kan matematikern göra upptäckter.

Men matematik har också en fot i verkligheten, och som jag försökt påvisa ovan, verkar vi inte fritt kunna explikera begrepp. Många explikationer tvingar sig på oss som den enda möjliga, likt explikationen av ”beräkningsbarhet”. Detta har konsekvenser vad gäller matematikerns bygge av tänkta världar. Bygget är inte godtyckligt. Ett matematiskt påstående om förhållanden i en tänkt värld är alltså sant, om det förhåller sig i denna tänkta värld så som utsägs i påståendet. Matematiska påståenden kan emellertid också handla om den empiriska verkligheten, och jag föreslår att matematiska begrepp och påståenden kallas ”fruktbara” om de har tillämpningar i den empiriskt givna världen. I detta sammanhang får på så sätt matematiken en instrumentell roll.

Om nu de matematiska objekten finns i en tänkt matematisk värld, är den vetbar av den enkla anledningen att den är konstruerad av oss själva. Ett problem skulle kunna vara möjligheten att två olika matematiker uppfattar de tänkta världarna på olika sätt, och att de dessutom inte förmår kommunicera med varandra om detta. Det är emellertid inte märkligare att vi kan tala om addition av tal, än att vi kan använda allmänord för att diskutera inredning av lägenheter. För att tala med Wittgenstein, delar vi, eller grupper av matematiker, en livsform, och i denna livsform finns ett språk i vilket matematiska ting kan avhandlas. Missförstånd uppstår och reds ut. Oenigheter kan vara livslånga, och kan upplösas i enighet, men detta är inte specifikt för matematik.

Sammanfattningsvis är min tes att grundläggande matematiska begrepp är explikationer av vardagliga begrepp, och att det inte finns någon större valfrihet när det gäller att explikera etablerade matematiska begrepp. Andra begrepp är sedan definierade utgående från dessa. En konsekvens av detta är att matematik har en fot i verkligheten och en i tänkta matematiska strukturer, modeller. I och med att denna kontakt med den empiriskt givna verklig-heten finns, så är matematikens tillämpbarhet i t.ex. fysik möjlig att förstå. Jag föreslår dessutom att vi benämner matematiska resultat ”fruktbara” om de är tillämpbara i en empiriskt given verklighet, och ”sanna”, om de korrekt beskriver en tänkt matematisk värld.[1]

[1] Föregångare till denna uppsats har diskuterats inom logikgruppen, under ledning av Christian Bennet, vid institutionen för filosofi, Göteborgs universitet. Jag vill tacka samtliga deltagare för välförtjänta påhopp, synpunkter och konstruktiva förslag.

## LITTERATUR

Ernest, Paul. 1991. *The Philosophy of Mathematics Education*. The Falmer Press.

Frege, Gottlob. 2002. *Aritmetikens grundvalar*, övers. F. Stjernberg. Thales.

Klein, Morris. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford U. P.

Kleiner, Israel. 1989. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, *College Mathematical Journal*, V 20:4 (282–300).

Lakoff, Georg och Rafael E. Núñes. 2000. *Where Mathematics Come From*. Basic Books.

Lakatos, Imre. 1990. *Bevis och motbevis*, övers. F. Cassel. Thales.

Lear, Jonathan. Aristotle’s Philosophy of Mathematics. 1982. *The Philosophical Review*, XCI, No. 2 (161–192).

Maddy, Penelope. 1990. *Realism in Mathematics*. Oxford U. P.

Maddy, Penelope. 1997. *Naturalism in Mathematics*. Oxford U. P.

Pearl, Judea. 2000. *Causality – Models, Reasoning, and Inference*. Cambridge U.P.

Sjögren, Jörgen. 1997. *Om Churchs tes*. Filosofiska meddelanden, Gröna serien, No 57, Filosofiska institutionen, Göteborgs universitet.

Steiner, Mark. 1998. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Harvard University Press.

Wedberg, Anders. 1966. *Filosofins historia från Bolzano till Wittgenstein*. Bonniers. Ny utgåva, Thales 2004.

Wigner, Eugene P. 1970. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, i Wigner, *Symmetries and Reflections, Scientific Essays*, The MIT. Press.

Wittgenstein, Ludwig. 1978. *Remarks on the Foundations of Mathematics*, rev. uppl. The MIT Press.