Kajsa Bråting
och Anders Öberg

Om matematiska begrepp – en filosofisk undersökning med tillämpningar

1. INLEDNING

Matematiska begrepp kan i många fall vara svåra att åskådliggöra, exempelvis de begrepp som involverar oändligheten. Många läroböcker i skolmatematik innehåller ett flertal exempel där man anknyter matematiska begrepp till vardagliga situationer, till exempel då man skall beräkna volymer och areor. Men övergår man till att betrakta kroppar med oändlig utsträckning blir det genast svårare att göra sig en bild av exempelvis en oändligt utsträckt kropp med ändlig volym. I de fall där det är svårt att vardagsanknyta de matematiska begreppen blir behovet av formella definitioner extra märkbart.

I den här uppsatsen diskuterar vi olika problem som involverar de matematiska begreppens ställning. Vi vill visa hur en filosofisk diskussion med rötter i 1600-talets matematikfilosofiska debatt kan vara användbar även för att bedöma frågor av pedagogisk natur. Ett centralt problem är i vilken utsträckning matematiken låter sig konkretiseras eller åskådliggöras, till exempel hur funktioner grafiskt låter sig åskådliggöras på en datorskärm. Närbesläktat är problemet om hur väl fysikaliska argument fungerar i matematisk problemlösning. Det finns en stor heuristisk kraft i fysikaliska argument, men de kan också leda fel. Vi vill problematisera den övertro som vi menar finns i pedagogiska sammanhang när det gäller matematikens möjligheter till konkretisering, fysikalisering och vardagsanknytning.

2. NÅGOT OM FILOSOFINS OCH MATEMATIKENS GEMENSAMMA HISTORIA

En av våra utgångspunkter är Paolo Mancosus studie[1] av hur den (matematik)filosofiska debatten under 1600-talet påverkades av de nya metoder som utvecklades av samtidens matematiker. Från och med 1630-talets

[1] P. Mancosu (1996), *Philosophy of Mathematics and Mathematical Praxis in the Seventeenth Century*, Oxford University Press.

mitt utvecklades nya metoder för bestämningar av areor och volymer som baserades på summeringar av oändligt små kvantiteter. Det uppstod en debatt om dessa nya metoders riktighet, eftersom dessa summeringar inte tycktes lika rigorösa som den Euklidiska matematiken, som under renässansen blivit ett vetenskapligt ideal. Många av 1600-talets mest välkända matematiker och filosofer deltog i denna debatt, såsom Descartes, Barrow, Wallis och Leibniz. En del av debatten fokuserades kring bevismetodernas förenklande i och med att man kunde begagna sig av oändligt små kvantiteter för area- och volymsbestämningar. Dessa bestämningar kunde nu utföras direkt, till skillnad mot den antika grekiska metoden som vilade på ett indirekt resonemang. För att demonstrera att två ytor var lika stora antog man under antiken att de inte var det och härledde en motsägelse – alltså var de lika stora. På detta sätt kom de nya metoderna att bättre konformera till det aristoteliska idealet (enligt *Posteriora Analytiken*) för en vetenskaplig demonstration, något som de nya metodernas förespråkare var snara att påpeka. Motståndarna hävdade (helt riktigt för övrigt) att det inte fanns en rigorös metod för att summan av oändligt små kvantiteter skulle kunna förstås som en vanlig summering – och hur skulle den då förstås?

Men de nya metoderna möjliggjorde också att man kunde bestämma areor och volymer av nya matematiska ytor och kroppar. De nya metoderna visade sig kunna utsträckas till ibland helt överraskande fall som till exempel den så kallade *Torricellis trumpet*. År 1642 visade Torricelli, som var Galileis efterträdare på professuren i matematik i Florens, att en oändligt utsträckt kropp kan ha ändlig volym. Detta ledde till en omfattande och långvarig debatt. Cavalieri, Descartes, Barrow, Gassendi, Hobbes, Wallis och Leibniz var inblandade i denna[2]. Hos Barrow, Gassendi och Hobbes framträdde en konservativ reaktion baserad på empiristiska överväganden: Hur kunde en oändligt utsträckt kropp existera i universum? Hur kunde en oändligt utsträckt kropp ha ett ändligt förhållande till en ändlig och avgränsad kropp? Detta motsade helt den aristoteliska uppfattningen att endast ändliga kroppar kan stå i proportion till varandra.

3. TORICELLIS TRUMPET OCH PARADOXER KRING OÄNDLIGHETEN

Om man exempelvis roterar kurvan $y=1/x$ kring y-axeln och skär den uppkomna rotationsvolymen med ett plan parallellt med x-axeln erhålls en volym som är lika med volymen av en viss ändlig cylinder. Detta bevisade Torricelli genom att tillämpa Cavalieris metod (från mitten av 1630-talet) för att beräkna volymer med hjälp av indivisibler, en viss

[2] Ibid. s. 136–149.

typ av oändligt små kvantiteter. Torricelli utvecklade Cavalieris metod genom att använda krökta indivisibler och tillämpade metoden på en kropp med oändlig utsträckning. Den uppkomna rotationskroppen, och liknande kroppar, brukar ibland kallas för ”Torricellis trumpet”, eftersom den snabbt smalnar av i den riktning som den är oändligt utsträckt, och har en i övrigt symmetriskt trattliknande form (eftersom den uppkommer genom en rotation av en kurva).

Torricellis trumpet var det första exemplet som utmanade det traditionella aristoteliska synsättet att det inte kan finnas ett förhållande mellan det ändliga och det oändliga. Mancosu diskuterar bland annat Thomas Hobbes och John Wallis debatt kring Torricellis trumpet. Hobbes syn på oändligheten var baserad på hans empiristiska epistemologi. Han insisterade på att alla objekt måste existera i universum och kunna uppfattas genom det ”naturliga ljuset”. Vidare menade Hobbes att när en matematiker talade om exempelvis ”en oändligt lång linje” skulle detta tolkas som en linje som kan utvidgas så långt som man vill. Hobbes med flera tillbakavisade akut oändliga kroppar; oändliga objekt saknar materiell grund och kan inte uppfattas i det ”naturliga ljuset”. Enligt Hobbes skulle man därmed inte kunna tala om en oändligt lång linje som någonting som är givet. Samma sak gäller Torricellis trumpet. För den samtida Oxford-matematikern John Wallis var en oändlig linje som *matematiskt objekt* inget problem. Om man kunde räkna ut en volym med de nya metoderna så var den aktuella kroppen matematiskt gripbar. Hobbes gjorde däremot inte någon skillnad mellan matematiska objekt och vardagliga objekt.

Mancosu diskuterar även Leibniz reaktion på Torricellis trumpet. Leibniz menade att ändligheten av dess volym inte var mera spektakulär än att exempelvis den oändliga serien $1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ är lika med 1. Leibniz behandlade alltså inte Torricellis trumpet som ett specifikt geometriskt problem (med eventuella materiella förtecken) utan överförde det i stället till ett generellt beräkningsproblem som involverar en aritmetisk metod för att beräkna oändliga summor. Man skulle kunna säga att Leibniz, liksom Wallis, gör en förskjutning av volymsbegreppet, det vill säga de generaliserar begreppet volym till att inte bara vara ett mått på ändliga kroppar utan också ett mått på vissa *matematiska* kroppar med oändlig utsträckning. Förskjutningen av volymsbegreppet kodifierades genom de metoder som användes för beräkningarna.

Ett liknande (mera modernt) problem är att visa att antalet element i mängden av alla naturliga tal är lika många, i termer av mängdens kardinalitet, som antalet element i mängden av alla jämna tal, vilket görs genom att visa att det existerar ett 1–1-förhållande mellan elementen i de respektive två mängderna. I det här fallet har man tänjt på begreppet ”antal”. Det är relativt enkelt att avgöra om två ändliga mängder är lika stora, eftersom det bara är att räkna antalet element i varje mängd. Då kan man också lätt upprätta en 1–1-korrespondens mellan mängderna. Men för att jämföra mängder med oändligt många element använder vi en *metod* för att upprätta en 1–1-korrespondens för visa att mängderna är likmäktiga. Det är viktigt att observera att både detta exempel och exemplet med Torricellis trumpet kontrasterar mot vardagliga situationer på så sätt att vi får ”paradoxer”: i det senare fallet får vi att den oändliga mängden av jämna naturliga tal inkluderas i den oändliga mängden av naturliga tal (trots likmäktigheten) och i det förra fallet får vi en ändlig volym, men en oändlig mantelyta. Populärt brukar man säga att Torricellis trumpet kan fyllas med (låt oss säga) en liter målarfärg, men ingen färg i världen räcker till för att måla trumpeten på utsidan! Det verkar som att storleken av Torricellis trumpet måste förstås genom de metoder som används för att beräkna dess volym och (mantel)yta. Poängen vi vill lyfta fram är att det inte finns ett ”intuitivt” sätt *utanför* matematiken att förstå ändligheten av volymen för Torricellis trumpet.

4. ETT ANNAT HISTORISKT EXEMPEL

Bråting[3] och Bråting och Öberg[4] har studerat ett annat klassiskt matematikhistoriskt problem från första hälften av 1800-talet: Cauchys berömda och under samtiden omtvistade summasats. I filosofiska sammanhang har Cauchys resultat från 1821 diskuterats av Lakatos[5] i termer av hur ett matematiskt problem får sin lösning genom ett bevisgenererande begrepp (likformig konvergens) efter det att motexempel utmanat satsens riktighet. Lakatos uppfattning om matematikens kritiserbarhet är ledstjärnan för hur han uppfattar reaktionerna på Abels berömda motexempel från 1826 till Cauchys sats. Det finns en uppsjö av alternativa förklaringar till varför Cauchys sats fick den formulering 1821 som av många ansågs vara felaktig under samtiden.

Vi har valt en utgångspunkt som i vissa avseenden överensstämmer med Lakatos och som visar varför det finns ett utrymme för matematikens kritiserbarhet, åtminstone i detta sammanhang av Cauchys sats. Vår slutsats bygger på att det under första hälften av 1800-talet inte finns

[3] K. Bråting (manuskript 2004), A New Look at E.G. Björling and the Cauchy Sum Theorem, tillgänglig på http://www.math.uu.se/~kajsa

[4] K. Bråting och A. Öberg (manuskript 2004), Definitioner och åskådlighet av matematiska begrepp, tillgänglig på http://www.math.uu.se/~kajsa

[5] I. Lakatos (1976), *Bevis och motbevis*, Thales, 1990.

precisa definitioner av exempelvis funktionsbegreppet. Det är oklart vad som är funktioner och vad som inte är det. Av denna anledning blir konvergensen av en oändlig summa av kontinuerliga funktioner (Cauchys förutsättningar i satsen/påståendet från 1821) inte klart entydig och det blir lättare att ge motexempel (som Abel gjorde 1826) till satsen genom att framföra en ny typ av funktioner som Cauchy inte från början tagit med i beräkningen. Det precisa moderna funktionsbegreppet skulle inte komma förrän i slutet av 1800-talet. Frege[6] gjorde sig lustig över just många 1800-talsmatematikers naiva funktionsbegrepp när han skrev att "med en funktion av x förstås ett matematiskt uttryck som innehåller x, en formel som innefattar bokstaven x". Vi återkommer i nästa avsnitt till att just ett oprecist funktionsbegrepp är ett paradexempel på när gymnasieelever och universitetsstudenter får problem i liknande situationer.

Icke-standardanalytikern Laugwitz[7] anser att Cauchys sats är korrekt om man använder sig av den teori om infinitesimaler som han själv varit med om att utveckla (och gärna vill se hos Cauchy!). I uppsatsen av Bråting problematiseras bland annat denna tolkning av Cauchy genom en utredning av hans samtida svenske kollega E.G. Björling[8], som påverkade Cauchy till en revidering av satsen så sent som 1853. För att återvända till funktionsbegreppet, så finns det ett annat skäl (förutom att tolkningen är uppenbart ahistorisk) att misstro de moderna infinitesimalisternas uttolkning av Cauchy (och eventuellt Björling). Om funktionsbegreppet aldrig blir tydligare än "ett matematiskt uttryck i en variabel x" så verkar Laugwitz tolkning inte rimlig, eftersom hans egen tolkning av Cauchy kan visas vara helt beroende av ett precist funktionsbegrepp.

5. BEGREPPSBILDER OCH BEGREPPSDEFINITIONER

De matematikpedagogiska forskarna Tall och Vinner[9] introducerade termerna begreppsbild (*concept image*) och begreppsdefinition (*concept definition*) för att förklara brister i matematikinlärningen hos gymnasie-

[6] G. Frege (1891), Funktion och begrepp, i Gottlob Frege, *Skrifter i urval*, Thales 1995.

[7] D. Laugwitz (1980), Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks, *Historia Mathematica* 14, 258–274.

[8] E.G. Björling (1853), Om oändliga serier, hvilkas termer äro continuerliga functioner af en reel variabel mellan ett par gränser, mellan hvilka serierna äro convergerande, Öfvers. *Kongl. Vetens. Akad. Förh.* Stockholm 1853, 147–160.

[9] D. Tall och S. Vinner (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.

elever och universitetsstudenter. Begreppsbilden beskrivs som "den totala kognitiva struktur som en individ associerar till ett visst begrepp, till exempel mentala bilder, egenskaper, processer, etc". En begreppsdefinition däremot fastställer (stipulerar) ett visst begrepps innebörd. Tall och Vinner menar att man måste göra en distinktion mellan begreppsbilderna och de formella definitionerna av matematiska begrepp. Många studenter tillämpar matematiska begrepp utan att vara medvetna om den formella definitionen. I stället lär de sig känna igen ett begrepp genom enskilda exempel.

Vanligtvis skapar man en begreppsbild innan man stött på någon formell definition och det är inte alls säkert att studenter någonsin tar till sig en formell definition, vilket enligt Tall och Vinner kan leda till problem vid hanterandet av matematiska begrepp.

Ett paradexempel på ett matematiskt begrepp som studenter gör sig bilder av genom exempel är funktionsbegreppet. Studenter arbetar ofta med konkreta funktioner som $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=e^x$, osv. De arbetar alltså ofta med funktioner som uttrycks som regler som talar om vad man gör med en variabel x. Men problemet är då att man aldrig strikt avgränsar vad som är en funktion och inte, vilket kan få allvarliga konsekvenser när man sysslar med gränsvärden på det sätt som Cauchy arbetade med i sin "felaktiga" sats från 1821. Man gör sig intuitiva föreställningar om de egenskaper som funktioner som regelmaskiner kan tänkas ha.

6. PROBLEM MED BEGREPPSBILDER

Torricellis trumpet är ett exempel på svårigheten med att visualisera matematiska objekt. Det blir svårt att illustrera att Torricellis trumpet, som skulle kunna ses som en oändligt utsträckt tratt, rymmer lika mycket vatten som en ändlig cylinder. Vissa matematiska förlopp går relativt bra att åskådliggöra med hjälp av en dator, till exempel skulle man kunna illustrera en cirkel genom att successivt öka antalet sidor i en regelbunden polygon. Detta är också intuitivt enkelt att föreställa sig. När det gäller exemplet med Torricellis trumpet finns det ingen direkt intuitiv föreställning om vad som händer i gräns och det går inte heller att på ett enkelt sätt försöka illustrera detta med hjälp av en dator. Alla sådana försök skulle innebära att man helt artificiellt skulle låtsas att den oändligt utsträckta trumpeten skulle vara tom på "vatten" precis då en ändlig cylinder skulle vara full. Det är alltså *principiellt* omöjligt att göra volymberäkningen av Torricellis trumpet intuitivt trovärdig genom att försöka åskådliggöra förloppet på en datorskärm.

Det är kanske lätt hänt att man koncentrerar sig för mycket på begreppsbilder i samband med undervisning av matematiska begrepp. Torricellis trumpet är ett exempel på att tillämpningen av begreppsbilder har en begränsning. Vinner har fortsatt att diskutera distinktionen mellan begreppsbilder och begreppsdefinitioner. Vinner[10] betonar betydelsen av att ha en korrekt begreppsbild i samband med att lära sig nya begrepp. Definitioner kan i vissa fall vara till hjälp, men att lära sig en definition utantill är ingen garanti för förståelse, menar Vinner. I denna uppsats har vi i stället diskuterat betydelsen av att kunna använda begrepp och metoder på ett korrekt sätt. Exempelvis insåg Torricelli att Cavalieris metod för att beräkna volymer med hjälp av indivisibler även gick att tillämpa på kroppar med oändlig utsträckning. Detta exempel visar att definitioner och metoder är särskilt viktiga i sammanhang då man inte kan luta sig mot något som lätt låter sig åskådliggöras.

Vi vill hävda att målsättningen med matematikundervisningen måste vara att ge förtrogenhet med begreppsanvändningen. Fokuseringen på motsättningen mellan begreppsdefinitioner och begreppsbilder bör av det skälet inte drivas för långt. Vi instämmer med Vinner[11] att undervisningen inte bör fokuseras kring utantillinlärning av formella definitioner. Men vi tror inte som Vinner[12] att ”to acquire a concept means to form a concept image”. Vi har försökt påvisa det problematiska med begreppsbilder om de ska förstås som något åskådliggörande av begrepp. Om ”concept image” betyder något annat, till exempel att man bemästrar en användning av begreppet, så framskymtar inte det varken hos Vinner och Tall eller hos Vinner. Varken begreppsdefinitioner eller begreppsbilder verkar vara de enda faktorerna som kan förklara hur man lär sig matematik på ett bra sätt. Definitioner kan man inte gärna lära sig utantill utan att förstå betydelsen av dem i problemsammanhang. Men vi har försökt visa att konkretisering och ett bildtänkande inom matematiken kan leda till en förvirrande oklarhet.

[10] S. Vinner (1992), The role of definitions in teaching and learning, in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer.

[11] Ibid.

[12] Ibid.