

JAN ODELSTAD & WLODEK RABINOWICZ

Allais' problem och Malmnäs'

Per-Erik Malmnäs har nyligen försökt visa att Allais' välkända problem inte är så allvarligt som det förefaller vara. ("Allais' paradox och maximering av förväntat värde", FT 1/95, ss 30–36.) Närmare bestämt har han "sökt visa att ... det val som de flesta anser som rimligt i Allais' exempel mycket väl låter sig förenas med att man maximerar det förväntade värdet". Samma påstående har även förts fram av andra forskare (t ex av D G Morrison i "On the Consistency of Preference in Allais' Paradox", *Behavioral Science* 12 (1967), eller av P Weirich i "Expected Utility and Risk", *British Journal for the Philosophy of Science* 37(1980)), men Malmnäs' argument för påståendet är nytt och bör diskuteras.

För att påminna läsaren om vad Allais' problem handlar om, låt oss betrakta följande fyra lotterier:

"Lotteri" A: Du får en miljon dollar (1M).

Lotteri B: Du får antingen 1M, eller fem miljoner (5M) eller ingenting (Noll), med sannolikheterna 0,89, 0,1 resp. 0,01.

Lotteri C: Du får 1M med sannolikheten 0,11; annars ingenting.

Lotteri D: Du får 5M med sannolikheten 0,1; annars ingenting.

För en normalt funtad person med normala penningbehov är det lockande att välja A framför B (man satsar på säkerhet) och D framför C (vinstchansen är liten i bägge fallen, och bara obetydligt mindre i D än i C, medan den eventuella vinsten är betydligt större i D). Kan ett sådant valbeteende rationaliseras i termer av förväntadnytto-maximering? Kan D antas ha högre förväntad nytta än C samtidigt som vi låter A:s förväntade nytta vara högre än B:s? Det är lätt att visa att så inte kan vara fallet. En grundläggande byggsten i teorin om förväntad nytta är det s k oberoendeaxiomet:

OBEROENDE: XpZ väljs framför YpZ om och endast om X väljs framför Y .

Förklaring: X, Y, Z, \dots står för möjliga lotteriutfall, som själva i sin tur kan vara lotterier. XpZ betecknar ett lotteri som tilldelar X sannolikheten p ($0 < p \leq 1$) och Y den återstående sannolikheten $1 - p$. YpZ tolkas på motsvarande sätt. Oberoendevillkoret implicerar att värdet hos ett lotteri är en strikt växande funktion av värden hos lotteriutfallen. I denna mening ger varje lotteriutfall ett oberoende värdebidrag till lotteriet.

I noten återges det välkända beviset för att valet av A framför B och av D framför C strider mot oberoendevillkoret (och följaktligen även mot förväntadnyttomaximering).¹

Malmnäs försöker nu undgå detta omöjlighetsresultat med följande resonemang: I Allais' problem konfronteras agenten med två hypotetiska val: mellan A och B samt mellan C och D . Föreslås dessa val för agenten vid ett och samma tillfälle eller vid två olika tillfällen? Om svaret är det senare, kvarstår ju möjligheten att agentens nyttotilldelningar har förändrats från det ena tillfället till det andra. Och då kan han mycket väl vara förväntadnyttomaximerare vid bägge tidpunkterna men ändå välja A framför B den ena gången och D framför C den andra, pga att hans nyttofunktion har förändrats. Om han i stället

1 Låt oss, vid sidan om lotterierna $A - D$, introducera ytterligare ett lotteri: Lotteri F : Du får $5M$ med sannolikheten $10/11$; annars ingenting.

Låt p stå för sannolikheten 0.11 . Det är lätt att se att lotteri C lika väl kan representeras som $ApNoll$ (dvs A med sannolikheten p och $Noll$ med sannolikheten $1 - p$), medan D kan uttryckas som $FpNoll$: 10% chans för $5M$ är ju detsamma som $11/100$ chans för $10/11$ chans för $5M$. Oberoendevillkoret implicerar därför att D väljs framför C om och endast om F väljs framför A . Det senare gäller, genom en ytterligare tillämpning av villkoret, om och endast om FpA väljs framför ApA . Men ApA är ju ingenting annat än A , och FpA kan visas sammanfalla med B . Slutsatsen blir att D väljs framför C om och endast om B väljs framför A , något som strider mot vårt antagande att en normalt funtad människa väljer A framför B och D framför C .

I detta resonemang har vi förutom oberoendevillkoret använt oss av det gängse antagandet att det enda som spelar roll i ett lotteri är sannolikheter för "slututfallen". Enligt detta antagande finns det därför ingen relevant skillnad mellan, säg, B och det komplexa lotteriet FpA , ty i bägge dessa lotterier får "slututfallen" $1M, 5M$ och $Noll$ samma sannolikheter.

konfronteras med de två valen vid ett och samma tillfälle, så blir den sammanlagda effekten av hans valbeteende komplext: vad han får är ett *paket* av lotterier. Om han t ex väljer A framför B och samtidigt D framför C, får han paketet AD, som ju innebär att han får en miljon med säkerhet (lotteri A) samt dessutom en 10% chans på ytterligare fem miljoner (lotteri D). Ett paket som AD blir därför egentligen liktydigt med ett lotteri (6M 10% 1M), där man får sex miljoner (dvs en plus fem) med 10% chans, och annars bara en miljon. På motsvarande sätt tolkas de övriga möjliga kombinationerna AC, BC och BD. Att under sådana omständigheter rationalisera valet av AD i termer av förväntadnyttomaximering skulle då vara detsamma som att visa existensen av nyttotilldelning till de möjliga slutliga utfallen av de olika paketen (Noll, 1M, 2M, 5M, 6M och 10M) enligt vilken AD:s förväntade nytta blir högre än de övriga lotterikombinationernas. Malmnäs visar att en sådan nyttotilldelning mycket väl kan konstrueras. (I själva verket visar han att denna tilldelning kan inbäddas i en nyttotilldelning till alla tänkbara penningutfall, från Noll uppåt, där mera pengar tillmäts mera nytta än mindre, samtidigt som gränsnyttan av penningtillskott är fallande.) Allais' problem tycks alltså vara löst!

Har Malmnäs rätt? Det tror inte vi, ty det återstår en tredje och mest näraliggande möjlighet att tolka det klassiska problemet. Enligt denna tolkning konfronteras agenten med de bägge hypotetiska valen vid ett och samma tillfälle, men de två valsituationerna presenteras för honom som *alternativa* hypoteser snarare än som en sammansatt hypotes, vilket Malmnäs har tänkt sig. Vi frågar agenten: Vad skulle du välja om du hade ett val mellan A och B? Och vad skulle du välja om du *i stället* konfronterades med valet mellan C och D? Det blir då aldrig aktuellt för agenten att ta ställning till Malmnäs' fråga hur man skulle göra om man fick bägge valförslagen *tillsammans*. Men om han vid ett och samma tillfälle konfronteras med två alternativa hypotetiska valavgöranden och förklarar sig välja A i det ena fallet och D i det andra, så blir den klassiska diagnosen tillämplig: hans valbeteende bryter mot oberoendevillkoret och kan följaktligen ej rationaliseras i

termer av förväntadnyttomaximering.² (Därmed vill vi givetvis inte säga att hans valbeteende är irrationellt. Tvärtom: Vi ser Allais' problem som en invändning mot förväntadnyttomaximering, betraktad som en allena rådande norm för rationalitet.)

Hur kommer det sig att Malmnäs inte nämner denna tolkning – en tolkning som vi tror har varit förhärskande i diskussionen om Allais' problem? Finns det något i hans uppsats som antyder en möjlig förklaring? Det tycks vara viktigt för Malmnäs att konstruera Allais' problem som ett problem som rör agentens valbeteende snarare än dennes preferenser. (I själva verket understrycker han att han i detta avseende ändrar på Allais' ursprungliga "preferensformulering" av problemet.) Denna betoning av valaspekten kan tyda på att Malmnäs i detta sammanhang har dragning åt det behavioristiska hållet: valbeteende är något vi kan direkt observera, till skillnad från preferenser.

2 Det är viktigt att man inte missförstår detta tolkningsförslag. Det är inte fråga om att agenten får betrakta *en* hypotetisk situation i vilken han kommer att ställas *antingen* inför A-eller-B-valet *eller* inför C-eller-D-valet, utan att i förväg veta vilket. Det är alltså inte fråga om att han ombeds att i förväg fixera sitt respektive valbeteende under osäkerhet om vilket val han så småningom kommer att erbjudas. I stället får han betrakta *två* skilda hypotetiska situationer då han ställs inför olika val. Vad vi vill utröna är vilket beslut han skulle träffa i var och en av dessa situationer, när han redan vet vilket val det gäller. Det är under dessa omständigheter som agenten kan förväntas att satsa på A i den ena situationen och på D i den andra. Om han däremot betraktade *en* hypotetisk situation i vilket det vore osäkert vilket val han skulle komma att erbjudas, är det inte alls givet att han i förväg skulle fixera sitt valbeteende till A respektive D. Ett sådant avgörande skulle ju inte ge honom någon garanti för att han får minst en miljon, hur det än går. Ty visar det sig att han råkar ut för C-eller-D-valet, så kan han ju, om det vill sig illa, hamna på noll. Utan en garanti för en säker vinst kan han hellre satsa på chansen för så höga vinster som möjligt och därför i förväg fixera sitt valbeteende till B resp. D. Dessa synpunkter aktualiseras däremot aldrig om agenten får betrakta två hypotetiska situationer, var för sig.

Det finns för övrigt en klar skillnad mellan beslutsproblem i *s k* normalform, då agenten i förväg fixerar en handlingsstrategi (sådan som "B respektive D"), från vilken han i efterhand inte ges någon möjlighet att avvika, och beslutsproblem i *extensiv* form, i vilka avvikelser från handlingsplaner är möjliga. Fick agenten en chans att avvika, skulle han mycket väl kunna tänkas att ge upp "B respektive D"-planen om det visade sig att det val han faktiskt blir erbjuden står mellan A och B. Då skulle ju A (den säkra miljonen) vara att föredra.

Dessa skulle kunna hävdas vara "privata" och endast partiellt manifesterbara i beteendet. Om man anlägger det behavioristiska perspektivet, skulle man nu kunna insistera att det beteende som kan vara föremål för observation är endast de val som agenten faktiskt gör och inte de som han *skulle* göra om han fick tillfälle. Hypotetiska val syns inte. Vi kan därför aldrig observera två val som är *alternativ* till varandra. Ställs agenten inför det ena valet så ställs han ju inte inför det andra. Hans beteende i de alternativa val som förutsätts i vår tolkning kan man inte uttala sig om enligt sträng behaviorism. Verbalt beteende är inte nog. Det räcker inte att agenten berättar om vad han *skulle* välja, sålänge allt stannar vid ord – sålänge valet förblir rent hypotetiskt. (Analogt räcker det inte att agenten berättar om sina preferenser sålänge dessa inte omsätts i handling.) Däremot kan vi mycket väl observera agentens valbeteende när han ställs inför valet mellan Malmnäs' sammansatta lotteripaket. Vi kan då enkelt notera vilket paket han väljer. Likaså blir det enkelt att observera agentens beteende om han väljer två gånger, vid olika tidpunkter.

Men kan detta verkligen vara Malmnäs' tanke? Han tycks ju betrakta även de val som förekommer i hans två tolkningsförslag som rent hypotetiska. ("Först kan man då fråga sig om det är tänkt att de hypotetiska valen [mellan A och B samt mellan C och D] skall ske vid samma tillfälle eller vid olika tillfällen", s 32.) Att ordna sådana val i verkligheten tycks vara ett företag som transcenderar de flesta filosofers resurser! Men då drabbas ju även de hypoteser som Malmnäs behandlar av behavioristiska invändningar.

Mot detta skulle den tänkte "strängt behavioristiske Malmnäs" kunna anföra att hans behandling av Allais' problem inte får misstolkas. Det är inte fråga om vad agenten säger sig vara *nu* beredd att välja i den hypotetiska situationen då han skulle presenteras med de olika lotteripaketet, utan om vad han *skulle* faktiskt välja i en sådan situation. *Då* skulle ju hans val kunna vara föremål för observation. Och om han valde paketet AD så skulle hans beteende vara rationaliserbart i förväntadnyttotermer.

Problemet med en sådan behavioristisk tolkning (vilken Malmnäs förresten kanske inte alls vill ställa sig bakom) är att de val som agenten faktiskt gör under sin karriär och som behöver rationaliseras med en nyttofunktion är mycket begränsade till antalet. Och om hans nyttofunktion tillåts variera från ett valtillfälle till nästa, så blir

rationaliseringsuppgiften extremt enkel: Vid varje givet tillfälle finns det ju bara ett faktiskt utfört val som behöver rationaliseras. Och för de andra valen kan man ta till andra nyttofunktioner.

Så har det naturligtvis aldrig varit tänkt att nyttofunktioner skulle nyttjas. En nyttofunktion, när den ses som rationalisering av valbeteende, är ju egentligen bara en bekväm kvantitativ representation av en uppsättning koherenskrav som rör förhållandet mellan *olika* val och de beslut som agenten i dessa val kan träffa: de olika besluten skall "hänga ihop" med varandra, vara inbördes "konsistenta". Sådana koherenskrav skulle ju ha varit nästintill tomma om de data som behövde rationaliseras skulle bestå av ett enda valbeslut. (Nästintill tomma, men inte helt tomma; se noten.³)

3 Att det ibland räcker med ett enda val för att rationaliseringen i förväntadnyttotermer skulle bli omöjlig, visas av följande exempel. Anta att agenten får veta att han så småningom blir erbjuden *antingen* A-eller-B-val eller C-eller-D-val, med de givna sannolikheterna q respektive $1 - q$, där q är mindre än 1 och större än 0. Agentens uppgift är att i *förväg* fixera sin strategi – att ange vad som skall väljas i det ena och det andra fallet. Situationen är som i den föregående noten, med den skillnaden att nu är sannolikheterna för de två alternativen givna: Vi har alltså här att göra med ett beslut under risk, och inte under osäkerhet. Ur agentens synpunkt har han nu ett val mellan fyra lotterier: AqC, AqD, BqC och BqD. Anta att han väljer AqD framför de andra alternativen. Vi kan lätt visa att ett sådant valbeteende strider mot förväntadnyttomaximering: Om den förväntade nyttan hos AqD är större än den förväntade nyttan hos AqC, så måste ju (i) C ha större förväntad nytta än D. Ty den förväntade nyttan hos ett lotteri är den sannolikhetsviktade summan av förväntade nyttor hos utfallen. Och här är sannolikhetsvikterna desamma. Och om den förväntade nyttan hos AqD är större än den förväntade nyttan hos BqD, så måste (ii) A ha större förväntad nytta än B. Men vi vet redan att (i) och (ii) inte är förenliga med varandra.

Att enstaka val motstår rationalisering i termer av förväntad nytta kan inträffa bara när valalternativen, som i det aktuella fallet, är komplexa objekt med delvis identiska komponenter. Ett enda val mellan "atomära" alternativ, eller mellan alternativ som saknar gemensamma delar, kan alltid rationaliseras i termer av förväntad nytta.

En fråga som ligger nära tillhands är om det ovanbeskrivna exemplet kan ses som en sådan version av Allais' problem som måste utgöra en tankeställare till och med för den stränge behavioristen. Valet av AqD kan ju inte förenas med nyttomaximering. Emellertid, när man tänker efter, inser man att detta val inte är särskilt rimligt. Det saknar den självklarhet som utmärker agentens val i Allais' exempel. Om q är mindre än 1, ger AqD ingen garanti

Den strängt behavioristiska approachen trivialiserar därför problemställningen. Och det förefaller oss att det här finns problem som inte alls är triviala. En lämplig syn på beslutsteorins frågor skulle kanske kunna formuleras så här: Vid varje tillfälle konfronteras agenten med bara ett val, men i förväg kan han vara osäker vilket val han kommer att konfronteras med. Därför bör han vara beredd på olika hypotetiska utvecklingar: han bör förfoga över ett helt spektrum av olika *valdispositioner*. Att t ex välja A i valet mellan A och B, och att välja D om valet i stället skulle stå mellan C och D. Dessutom tar det ju tid att skaffa sig sådana dispositioner. Normalt bör de därför etableras långt i förväg. Därför har vi dispositioner även för val som vi inte tror är nära förestående. Vi är också så funtade att de dispositioner vi har tenderar att ge upphov till beslätade dispositioner vad beträffar andra fall, även sådana som vi inte alls har anledning att förvänta oss. (Så är det tyvärr med de val som förekommer i Allais' exempel!) Det är hela denna bukett av koexisterande valdispositioner hos agenten som är föremål för beslutsteoretikerns intresse. Och det är dessa dispositioner som utsätts för hans mer eller mindre välgrundade koherenskrav, sådana som oberoendevillkoret. Att just detta krav inte är så rimligt som man skulle kunna tro framgår av Allais' exempel.

för en säker vinst. Och då saknas det skäl för att välja AqD snarare än BqD eller AqC. (Jfr den föregående noten.)