

Allais paradox och maximering av förväntat värde

Det är en allmänt spridd uppfattning att Allais paradox (se Allais och Hagen 1979 sid 89 f eller Allais 1953 sid 527) visar att vissa väl övervägda val som individer önskar göra inte är förenliga med att de alltid önskar välja det handlingsalternativ som har högst förväntat värde och att principen att man i varje valsituation bör välja det alternativ som har högst väntevärde därför är orimlig. I denna not ämnar jag diskutera räckvidden hos Allais paradox och mer precist söka visa att denna är tämligen begränsad eftersom det val som de flesta anser som rimligt i Allais exempel mycket väl låter sig förenas med att man maximerar det förväntade värdet.

1. Allais paradox

Betrakta följande två valsituationer:

Val 1. Välj mellan lotteri A och lotteri B, som båda innehåller ett ändligt antal lotter.

Loteri A: $\text{Pr}(1) = 1$.

Loteri B: $\text{Pr}(0) = 0,01$; $\text{Pr}(1) = 0,89$; $\text{Pr}(5) = 0,1$.

Lottpris i båda lotterierna: 0 kr.

Val 2. Välj mellan lotteri C och lotteri D, som båda innehåller ett ändligt antal lotter.

Loteri C: $\text{Pr}(0) = 0,89$; $\text{Pr}(1) = 0,11$.

Loteri D: $\text{Pr}(0) = 0,9$; $\text{Pr}(5) = 0,1$.

Lottpris i båda lotterierna: 0 kr.

Här är $\text{Pr}(x)$ lika med sannolikheten att vinna x gånger en viss penningssumma. I originalexemplen är vinsterna ansevärda: $1 = 100$ miljoner i någon enhet (a a sid 89) eller $1 = 0,5$ miljoner \$ (Hagen 1969). Det är

därför rimligt att antaga de flesta skulle tänka sig för noga om de hade turen att hamna i någon av dessa valsituationer.

Om någon läsare förundras över den ovanliga relationen mellan lottpris och vinster, så förklaras denna av att i den ursprungliga formuleringen så handlar det inte om ett valproblem utan i stället om att besvara följande två frågor om preferenser.

Fråga 1. Föredrar du situation A framför situation B?

Situation A:

- att med säkerhet få 100 miljoner.

Situation B:

- att med 10% sannolikhet få 500 miljoner,
- att med 89% sannolikhet få 100 miljoner, och
- att med 1% sannolikhet inte få något.

Fråga 2. Föredrar du situation C framför situation D?

Situation C:

- att med 11% sannolikhet få 100 miljoner, och
- att med 89% sannolikhet inte få något.

Situation D:

- att med 10% sannolikhet få 500 miljoner, och
- att med 90% sannolikhet inte få något.

Det ursprungliga problemet gällde således snarare vilka av dessa preferenser som är förenliga med att man av två alternativ föredrar det som har högst väntevärde. Lotteriversionen av Allais paradox finns dock redan i Savage (1954) och har sedan dess av lättförstådda skäl varit den dominerande.

Om en person nu skall välja mellan A och B och mellan C och D och samtidigt vid båda valen önskar välja det alternativ som har högst förväntat värde, så kan han resonera på följande sätt: Låt $V(x)$ vara det värde som utfallet x har för mig vid valtilfället. Då gäller:

$$A:s \text{ väntevärde } (E_V(A)) = V(1),$$

$$E_V(B) = 0,01 \cdot V(0) + 0,89 \cdot V(1) + 0,1 \cdot V(5),$$

$$E_V(C) = 0,89 \cdot V(0) + 0,11 \cdot V(1), \text{ och}$$

$$E_V(D) = 0,9 \cdot V(0) + 0,1 \cdot V(5).$$

Med utgångspunkt från detta kan man lätt räkna ut att $E_V(A) > E_V(B)$ omm $0,11 \cdot V(1) > 0,1 \cdot V(5) + 0,01 \cdot V(0)$, vilket i sin tur gäller omm

$0,11 \cdot V(1) + 0,89 \cdot V(0) > 0,1 \cdot V(5) + 0,01 \cdot V(0) + 0,89 \cdot V(0)$, vilket i sin tur gäller omm $E_V(C) > E_V(D)$. (Uttrycket "omm" är här den vanliga förkortningen av "om och endast om".) Alltså kan jag, om jag önskar välja det alternativ som har högst väntevärde, inte välja A och D.

Vid enkäter (se t ex MacCrimmon och Larsson 1979) har det dock visat sig att de flesta personer föredrar A framför B och D framför C och att de håller fast vid detta val även sedan de fått reda på att de då inte har valt enligt principen att maximera väntevärdet, och när t ex Savage (Savage 1972 sid 102 f) insåg att han måste ändra sig, så var han tvungen att täcka reträtten dels genom ett vanställande av exemplet (Hagen 1972) dels genom ett cirkulärt argument (Savage använder sig av "the sure-thing principle" när han skall argumentera för "the sure-thing principle".) Därför har Allais paradox för de flesta, inklusive mig, framstått som det bästa exemplet på att man inte alltid bör välja det alternativ som har högst väntevärde.

2. Diskussion av paradoxen

Trots att Allais paradox förefaller så enkel och klar kan det finnas anledning att närmare skärskåda på vilket sätt den uppstår. Först kan man då fråga sig om det är tänkt att de hypotetiska valen skall ske vid samma tillfälle eller vid olika tillfällen. Om de skall ske vid olika tillfällen, så är det inte givet, ja inte ens naturligt, att samma värdefunktion används. Ty vi tänker oss att en persons värdefunktion i allmänhet är beroende av hans aktuella tillgångar och eventuellt av hur dessa har varierat under hans tidigare liv. Men om inte samma värdefunktion används, så behöver naturligtvis inte någon paradox uppstå. Om valen å andra sidan skall ske vid ett tillfälle, så är beskrivningen ovan av utfallen inte invändningsfri; ty en korrekt beskrivning av dem bör snarare se ut på följande sätt:

Välj ett lotteri ur grupp 1 och ett lotteri ur grupp 2.

Grupp 1: lotteri A, lotteri B.

Grupp 2: lotteri C, lotteri D.

Detta ger fyra alternativ som vi lämpligen kallar AC, AD, BC och BD och som har följande utfall:

AC: $\text{Pr}(1) = 0,89$; $\text{Pr}(2) = 0,11$.

AD: $\text{Pr}(1) = 0,9$; $\text{Pr}(6) = 0,1$.

BC: $\Pr(0) = 0,0089$; $\Pr(1) = 0,7932$; $\Pr(2) = 0,0979$; $\Pr(5) = 0,089$;
 $\Pr(6) = 0,011$.

BD: $\Pr(0) = 0,009$; $\Pr(1) = 0,801$; $\Pr(5) = 0,091$; $\Pr(6) = 0,089$; $\Pr(10)$
 $= 0,01$.

Att vid samma tillfälle välja A i val 1 och D i val 2 svarar mot att välja AD i detta val, och Allais problem transformeras till frågan om det är möjligt att välja AD och samtidigt välja det alternativ som har högst väntevärde. Det visar sig då att Allais problem på ett naturligt sätt genererar tre olika frågor, nämligen frågorna (a), (b) och (c) nedan. (Som kommentar till dessa frågor kan följande behöva påpekas. R står som vanligt för klassen av reella tal. Det gäller för alla funktioner $V: R \rightarrow R$ att $E_V(A) > E_V(B)$ omm $E_V(C) > E_V(D)$. I fråga (c) kan den som önskar ersätta villkoret på V med att $dV/dx > 0$ och att $d^2V/dx^2 < 0$. På så sätt blir ju V en normal utilitetsfunktion.)

(a) Finns det en funktion $V: R \rightarrow R$ sådan att $E_V(AD) > E_V(AC)$, $E_V(AD) > E_V(BC)$, och $E_V(AD) > E_V(BD)$?

(b) Finns det en strikt växande funktion $V: R \rightarrow R$ sådan att $E_V(AD) > E_V(AC)$, $E_V(AD) > E_V(BC)$, och $E_V(AD) > E_V(BD)$?

(c) Finns det en strikt växande funktion men med strikt avtagande ökningstakt $V: R \rightarrow R$ sådan att $E_V(AD) > E_V(AC)$, $E_V(AD) > E_V(BC)$, och $E_V(AD) > E_V(BD)$?

Vi skall visa nedan att (c) kan besvaras jakande och att ett val av AD därför mycket väl låter sig förenas med att följa principen om att välja det alternativ som har högst väntevärde. Det kommer också att visa sig att ett val av AD är förenligt med ett accepterande av i stort sett alla axiomsystem för förväntad nytta som har formulerats. Allais paradox tycks därför inte ha alltför stor räckvidd och den kan därför knappast användas som ett argument för att man inte bör välja det alternativ som har högst väntevärde.

3. Lösning av Allais problem

Svaret på fråga (b) är ja omm det finns en funktion V sådan att

- (i) $E_V(AD) - E_V(AC) > 0$,
- (ii) $E_V(AD) - E_V(BC) > 0$,
- (iii) $E_V(AD) - E_V(BD) > 0$, och

$$(iv) \quad V(10) > V(6) > V(5) > V(2) > V(1) > V(0).$$

Detta gäller i sin tur omm

$$(i) \quad 0,1 \cdot V(6) + 0,9 \cdot V(1) - 0,11 \cdot V(2) - 0,89 \cdot V(1) > 0,$$

$$(ii) \quad 0,1 \cdot V(6) + 0,9 \cdot V(1) - 0,011 \cdot V(6) - 0,089 \cdot V(5) - 0,0979 \cdot V(2) - 0,7932 \cdot V(1) - 0,0089 \cdot V(0) > 0,$$

$$(iii) \quad 0,1 \cdot V(6) + 0,9 \cdot V(1) - 0,01 \cdot V(10) - 0,089 \cdot V(6) - 0,091 \cdot V(5) - 0,801 \cdot V(1) - 0,009 \cdot V(0) > 0, \text{ och}$$

$$(iv) \quad V(10) > V(6) > V(5) > V(2) > V(1) > V(0).$$

För att ange en sådan funktion, sätt först $V(10) = 1$ och $V(0) = 0$. Då

$$(i) \quad 0,1 \cdot V(6) - 0,11 \cdot V(2) + 0,01 \cdot V(1) > 0,$$

$$(ii) \quad 0,089 \cdot V(6) - 0,089 \cdot V(5) - 0,0979 \cdot V(2) + 0,1068 \cdot V(1) > 0,$$

$$(iii) \quad 0,011 \cdot V(6) - 0,01 - 0,091 \cdot V(5) + 0,099 \cdot V(1) > 0, \text{ och}$$

$$(iv) \quad 1 > V(6) > V(5) > V(2) > V(1) > 0.$$

Sätt sedan $V(6) = 1 - \epsilon_1$, $V(5) = V(6) - \epsilon_2$, $V(2) = V(5) - \epsilon_3$, $V(1) = V(2) - \epsilon_4$, där $0 < \epsilon_1, \dots, \epsilon_4 < 1$ och $0 < \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 < 1$. Då

$$(i) \quad 0,1 \cdot \epsilon_2 + 0,1 \cdot \epsilon_3 - 0,01 \cdot \epsilon_4 > 0,$$

$$(ii) \quad 0,0089 - 0,0089 \cdot \epsilon_1 + 0,0801 \cdot \epsilon_2 - 0,0089 \cdot \epsilon_3 - 0,1068 \cdot \epsilon_4 > 0, \text{ och}$$

$$(iii) \quad 0,009 - 0,019 \cdot \epsilon_1 - 0,008 \cdot \epsilon_2 - 0,099 \cdot \epsilon_3 - 0,099 \cdot \epsilon_4 > 0.$$

Vi ser alltså att om $\max(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) < 0,04$ och $\epsilon_4 < 10 \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_3)$, så finns det en funktion med de önskade egenskaperna.

Vidare ser vi att de villkor som $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ måste uppfylla är förenliga med att V 's ökningstakt är strikt avtagande. Dessutom kan vi (se t ex Malmnäs 1994) konstruera system S som innehåller lotterierna AC , AD , BC , och BD , som uppfyller Savages axiom och som är sådana att $AD > AC$, $AD > BC$ och $AD > BD$. Slutligen kan motsvarande konstruktioner utföras för alla system som behandlas i Malmnäs 1990.

4. Känslighetsanalyser

Det kan vara instruktivt att studera i vilken utsträckning resultatet i avsnitt 3 är beroende av de valda priserna och sannolikhetsvärdena. Om vi först betraktar priserna, så ser vi att vi kan utgå från $U(0), \dots, U(10)$, där U är en godtycklig strikt växande funktion, om vi nöjer oss med ett jakande svar på fråga (b). I så fall är alltså resultatet i mycket liten utsträckning beroende av de valda priserna. Om vi dessutom önskar besvara fråga (c) jakande, så ger olikheten $\epsilon_4 <$

$10 \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_3)$ att U också måste uppfylla villkoret $U(6) - U(2) > 0, 1 \cdot (U(2) - U(1))$, något som naturligtvis i någon mån inskränker valet av priser.

Om vi därefter betraktar de valda sannolikheterna, så kan vi sätta

$$E_V(A) = V(1),$$

$$E_V(B) = a \cdot V(0) + b \cdot V(1) + (1-a-b) \cdot V(5),$$

$$E_V(C) = b \cdot V(0) + (1-b) \cdot V(1), \text{ och}$$

$$E_V(D) = (a+b) \cdot V(0) + (1-a-b) \cdot V(5).$$

Här är $0 < a, b < 1$ och $a+b < 1$. Vidare är a och b valda så att $E_V(A) > E_V(B)$ omm $E_V(C) > E_V(D)$.

Detta ger

$$E_V(AC) = b \cdot V(1) + (1-b) \cdot V(2),$$

$$E_V(AD) = (a+b) \cdot V(1) + (1-a-b) \cdot V(6),$$

$$E_V(BC) = ab \cdot V(0) + (a(1-b) + b^2) \cdot V(1) + b(1-b) \cdot V(2) + b(1-a-b) \cdot V(5) + (1-b)(1-a-b) \cdot V(6), \text{ och}$$

$$E_V(BD) = a(a+b) \cdot V(0) + b(a+b) \cdot V(1) + (2a+b)(1-a-b) \cdot V(5) + b(1-a-b) \cdot V(6) + (1-a-b)^2 \cdot V(10).$$

Då får vi

$$E_V(AD) > E_V(AC) \text{ omm } (1-a-b) \cdot \epsilon_2 + (1-a-b) \cdot \epsilon_3 - a \cdot \epsilon_4 > 0,$$

$$E_V(AD) > E_V(BC) \text{ omm } ab - ab \cdot \epsilon_1 + (b-2ab-b^2) \cdot \epsilon_2 - ab \cdot \epsilon_3 - (b+ab-b^2) \cdot \epsilon_4 > 0, \text{ och}$$

$$E_V(AD) > E_V(BD) \text{ omm } a(a+b) - (1-2a-2b+3ab+2a^2+b^2) \cdot \epsilon_1 - (2a^2+2ab-a) \cdot \epsilon_2 - (a+b-ab-b^2) \cdot \epsilon_3 - (a+b-ab-b^2) \cdot \epsilon_4 > 0.$$

Vi ser alltså att olikheten $(1-a-b) \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_3) - a \cdot \epsilon_4 > 0$ inskränker de möjliga valen av a och b , om vi önskar ett jakande svar på fråga (c) ovan, ty då måste vi ha $4(1-a-b) > a$. Detta innebär att om a är som i avsnitt 1 ovan, dvs $a = 0,01$, så måste vi ha $b < 0,9875$. Men a o duger då nästan alla värden på b . Olikheten ovan ger alltså i de intressanta fallen inte upphov till alltför stora inskränkningar. Om vi i stället nöjer oss med att besvara fråga (b) jakande, så gäller det för alla tal a, b som uppfyller de grundläggande villkoren ovan att det finns tal $\epsilon_1, \dots, \epsilon_4$ sådana att olikheterna $E_V(AD) > E_V(AC)$, $E_V(AD) > E_V(BC)$ och $E_V(AD) > E_V(BD)$ gäller. Sammantaget ser vi alltså att resultatet i avsnitt 3 inte i någon större utsträckning är beroende av de ansatta sannolikheterna.

Litteratur

- ALLAIS, M, 1953. "Le Comportement de l'Homme Rationel devant le Risque: Critique des Postulats et Axioms de l'École Americaine", *Econometrica*, 21, 503–546.
- ALLAIS, M och O HAGEN (red.), 1979. *Expected Utility and the Allais Paradox*, Reidel, Dordrecht, Nederländerna.
- HAGEN, O, 1969. "Separation of Cardinal Utility and Specific Utility of Risk in Theory of Choices under Uncertainty", *Statsøkonomisk Tidsskrift*, No 3, 81–107.
- HAGEN, O, 1972. "A New Axiomatization of Utility under Risk", *Teorie a Metoda*, IV/2, 55–80.
- MACCRIMMON, K R och S LARSSON, 1979. "Utility Theory: Axioms versus 'Paradoxes'", i Allais, M och O Hagen (red.), 1979. *Expected Utility and the Allais Paradox*, Reidel, Dordrecht, Nederländerna.
- MALMNÄS, P E, 1990. "Axiomatic Justifications of the Utility Principle: a Formal Investigation", Forskningsrapport HSFR F 677/87.
- MALMNÄS, P E, 1994. "Axiomatic Justifications of the Utility Principle: a Formal Investigation", *Synthese*, 99, 233–249.
- SAVAGE, L J, 1954. *The Foundations of Statistics*, John Wiley, New York (2a uppl 1972, Dover, New York).